



Dérivées partielles et directionnelles

Exercice 1

Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition D_f . Pour chacune des fonctions, calculer ensuite les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition lorsqu'elles existent :

1. $f(x, y) = x^2 \exp(xy)$,
2. $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$,
3. $f(x, y) = \sin^2 x + \cos^2 y$,
4. $f(x, y, z) = x^2 y^2 \sqrt{z}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[002622]

Exercice 2

Soit f la fonction sur \mathbb{R}^2 définie par $f(x, y) = x \cos y + y \exp x$.

1. Calculer ses dérivées partielles.
2. Soit $v = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $D_v f(0, 0)$. Pour quelle(s) valeur(s) de θ cette dérivée directionnelle de f est-elle maximale/minimale ? Que cela signifie-t-il ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[002623]

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x, y) = f(x + y), \quad h(x, y) = f(x^2 + y^2), \quad k(x, y) = f(xy)$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[001801]

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x & \text{si } |x| > |y| \\ f(x, y) &= y & \text{si } |x| < |y| \\ f(x, y) &= 0 & \text{si } |x| = |y|. \end{aligned}$$

Étudier la continuité de f , l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[001803]

Exercice 5

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Étudier la continuité de f . Montrer que f est de classe C^1 .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[001800]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpréter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles de calcul de la dérivée ordinaires.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Interpréter la dérivée directionnelle à l'aide de l'intersection du graphe de la fonction avec un plan convenable.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpréter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles de calcul de la dérivée ordinaires.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Distinguer tout de suite la partie triviale et la partie non triviale de l'exercice.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Il est évident que, en tout point (x, y) distinct de l'origine, la fonction f est continue et que les dérivées partielles y existent et sont continues. Il suffit de montrer que f est continue en $(0, 0)$ et que les dérivées partielles y existent et y sont continues.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \exp(xy) + x^2 y \exp(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \exp(xy)$$

2. $D_f = \{(x, y); x > 0 \text{ ou } y \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2}$$

3. $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \sin x \cos x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2 \sin y \cos y$$

4. $D_f = \{(x, y, z); z \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2y^2}{2\sqrt{z}}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y \exp x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + \exp x$.

2. $D_v f(0, 0) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \cos \theta + \sin \theta$. Cette dérivée directionnelle de f est maximale quand $\sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c.a.d. quand $\theta = \frac{\pi}{4}$, et minimale quand $\sin \theta = \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, c.a.d. quand $\theta = \frac{5}{4}\pi$.

Signification géométrique : Le plan engendré par le vecteur $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ et l'axe des z rencontre le graphe $z = f(x, y)$ en une courbe. Cette courbe est de pente maximale en valeur absolue pour $\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos \theta = \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (même plan). Les deux signes s'expliquent par les deux orientations possibles de cette courbe (sens du paramétrage).

Correction de l'exercice 3 ▲

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= f'(x + y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= f'(x + y) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= 2xf'(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) &= 2yf'(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial k}{\partial x}(x, y) &= yf'(xy) \\ \frac{\partial k}{\partial y}(x, y) &= xf'(xy)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Il est évident que, en tout point tel que $|x| < |y|$ ou $|x| > |y|$, la fonction est continue et les dérivées partielles existent.

Soit $x \neq 0$. Alors f n'est ni continue en (x, x) ni en $(x, -x)$. Car

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (x,x) \\ |u| > |v|}} f(u, v) &= \lim_{u \rightarrow x} u = x \neq 0, \\ \lim_{(u,u) \rightarrow (x,x)} f(u, u) &= 0, \\ \lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (x,-x) \\ |u| > |v|}} f(u, v) &= \lim_{u \rightarrow x} u = x \neq 0, \\ \lim_{(u,-u) \rightarrow (x,-x)} f(u, u) &= 0.\end{aligned}$$

Par contre, f est continue en $(0, 0)$. Car

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} f(u, v) = 0$$

puisque

$$\begin{aligned}f(u, v) &= u \quad \text{si } |u| > |v|, \\ f(u, v) &= v \quad \text{si } |u| < |v|, \\ f(u, v) &= 0 \quad \text{si } |u| = |v|,\end{aligned}$$

et puisque alors $\lim_{u \rightarrow 0} u = 0$ et $\lim_{v \rightarrow 0} v = 0$.

Soit (x, y) un point où $|x| = |y|$. Il reste à étudier les dérivées partielles en un tel point (x, y) . Soit $x \neq 0$. Alors la fonction h de la variable t définie par

$$h(t) = f(x + t, y) = \begin{cases} x + t, & |x + t| > |y| \\ y, & |x + t| < |y| \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ n'existe pas. De même, la fonction k de la variable t définie par

$$k(t) = f(x, y + t) = \begin{cases} x, & |x| > |y + t|, \\ y + t, & |x| < |y + t|, \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ n'existe pas. Enfin soit $x = 0$. Alors la fonction h de la variable t définie par

$$h(t) = f(t, 0) = t$$

est dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe. De même, la fonction k de la variable t définie par

$$k(t) = f(0, t) = t$$

est dérivable en $t = 0$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe.

Correction de l'exercice 5 ▲

Puisque $\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right|$ reste borné,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$$

d'où f est continue en $(0, 0)$. De même,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$$

d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent, et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. En plus, en dehors de l'origine,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x,y)}{x} + xy \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{f(x,y)}{x} + 4 \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f(x,y)}{y} + xy \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{f(x,y)}{y} + 4 \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

il s'ensuit que

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0, \quad \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0,$$

d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$.
